



Università di Catania- Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Idraulica

Idrodinamica costiera

(Prof. Enrico FOTI)

LE FORZE CHE DETERMINANO CORRENTI LITORANEE

In generale lungo la costa, l'acqua si muove in una o nell'altra direzione come conseguenza dell'equilibrio dinamico tra l'azione esercitata dalle forzanti e l'azione delle forze resistenti.

Tra le **forzanti** possiamo menzionare:

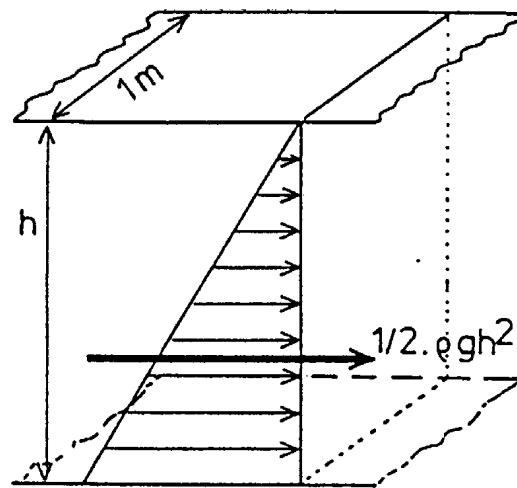
- le componenti del radiation stress;
- le forze di vento;
- le forze dovute alla marea (in genere sempre presente nel Mare del Nord, meno nel Mediterraneo).

Tra le **forze resistenti** possiamo ricordare:

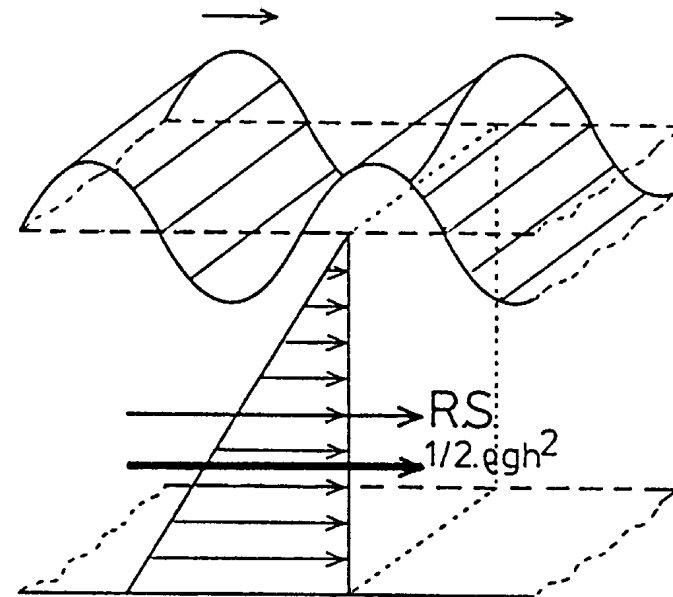
- la turbolenza;
- l'attrito al fondo.

IL RADIATION STRESS (1/7)

Le onde influenzano le **condizioni medie temporali** del mezzo in cui si propagano. Tale influenza può essere espressa attraverso l'introduzione di termini spuri nel bilancio di massa e di quantità di moto. A causa della presenza del moto ondoso si ha un **contributo alla quantità di moto orizzontale nel bilancio medio temporale di quantità di moto** che viene definito **“radiation stress”** (Longuet-Higgins & Stewart; 1960).



assenza di moto ondoso



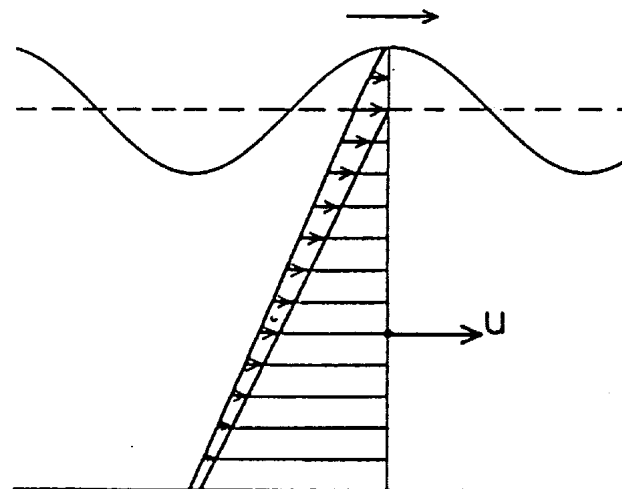
presenza di moto ondoso

IL RADIATION STRESS (2/7)

Se si assume -per assurdo- che il valore assoluto delle fluttuazioni di pressione sotto le creste e sotto i cavi siano le stesse, ci sarebbe comunque una differenza dovuta al fatto che sotto la cresta ci sarebbe una pressione maggiore che agisce su di un'area maggiore, mentre sotto i cavi ci sarebbe una pressione inferiore che agisce su di un'area inferiore.

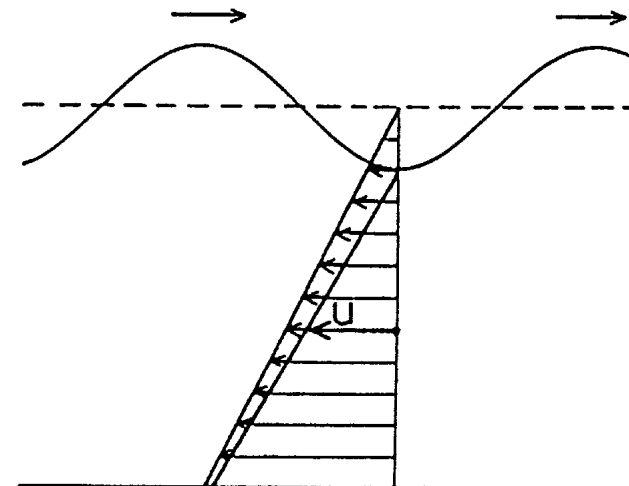
Il valore medio temporale delle fluttuazioni di pressione integrate sulla profondità non è nullo ma positivo.

Questo valore positivo rappresenta un'aliquota del radiation stress. Un altro contributo è dato dalle fluttuazioni di velocità.



enlarged pressure

sotto la cresta



decreased pressure

sotto il cavo

IL RADIATION STRESS (3/7)

E' opportuno precisare che il radiation stress non è né una tensione pura (forza per unità di area, ossia N/m^2), né una forza (N), ma piuttosto una **forza per unità di lunghezza** (N/m) che si esplica sulla profondità (derivante dall'integrazione sulla profondità di una forza per unità di superficie).

Il radiation stress **non è isotropico e dipende dalla giacitura dell'elemento superficiale su cui agisce**. Pertanto, assumendo due piani verticali e perpendicolari agli assi orizzontali, ossia in maniera tale che X sia orientato nella direzione di propagazione dell'onda e Y lungo la cresta dell'onda, S_{XX} e S_{YY} individueranno i radiation stress principali.

IL RADIATION STRESS (4/7)

Assumendo un piano $X=\text{costante}$ largo 1m, il valore istantaneo di trasferimento di q.d.m. nella direzione X è dato da:

$$\int_0^{h+\eta} (p + \rho V^2) dz$$

dove:

- h = profondità d'acqua;
- η = livello del pelo libero;
- p = pressione;
- ρ = densità dell'acqua;
- V = velocità.

L'integrale sopra riportato è equivalente alla componente X della forza che agisce su questo piano. Il contributo dovuto alla presenza dell'onda (valore medio temporale dell'integrale per unità di larghezza) è, per definizione, la componente XX del radiation stress, ossia, in formule:

$$S_{XX} = \overline{\int_0^{h+\eta} (p + \rho V^2) dz} - \int_0^h p_o dz$$

in cui il contributo idrostatico è pari a:

$$\int_0^h p_o dz = \int_0^h \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g h^2$$

con g = accelerazione di gravità.

IL RADIATION STRESS (5/7)

In S_{XX} il primo pedice indica la direzione di trasferimento (attraverso il piano $X=\text{costante}$), il secondo indice rappresenta la componente della q.d.m. trasferita (X nella fattispecie).

Il valore di S_{XX} potrebbe essere calcolato con qualsiasi teoria del moto ondoso. Il risultato che si ottiene integrando sulla profondità di un piano perpendicolare all'asse X, è il seguente (Battjes; 1986):

$$S_{XX} = \left[\frac{2kh}{\sinh(2kh)} + \frac{1}{2} \right] E = \left[2n - \frac{1}{2} \right] E \quad (4)$$

dove:

- S_{XX} = la componente principale del radiation stress nella direzione di propagazione dell'onda;
- H = profondità dell'acqua;
- k = numero d'onda ($=2\pi/L$);
- L = lunghezza d'onda;
- E = energia del moto ondoso pari a: $1/8\rho g H^2$ (H essendo l'altezza d'onda);
- $n = \frac{c_g}{c} = \frac{kh}{\sinh(2kh)} + \frac{1}{2}$

In maniera del tutto analoga si determina:

$$S_{YY} = \frac{kh}{\sinh(2kh)} E = \left[n - \frac{1}{2} \right] E \quad (5)$$

IL RADIATION STRESS (6/7)

Approssimazioni in acque profonde e in acque basse

Le applicazioni delle usuali approssimazioni per acque profonde (per cui $n=1/2$), ovvero per acque basse (per cui $n=1$) portano rispettivamente alle seguenti espressioni:

- acque profonde

$$S_{xx} = \frac{1}{2} E$$

$$S_{yy} = 0$$

- acque basse

$$S_{xx} = \frac{3}{2} E$$

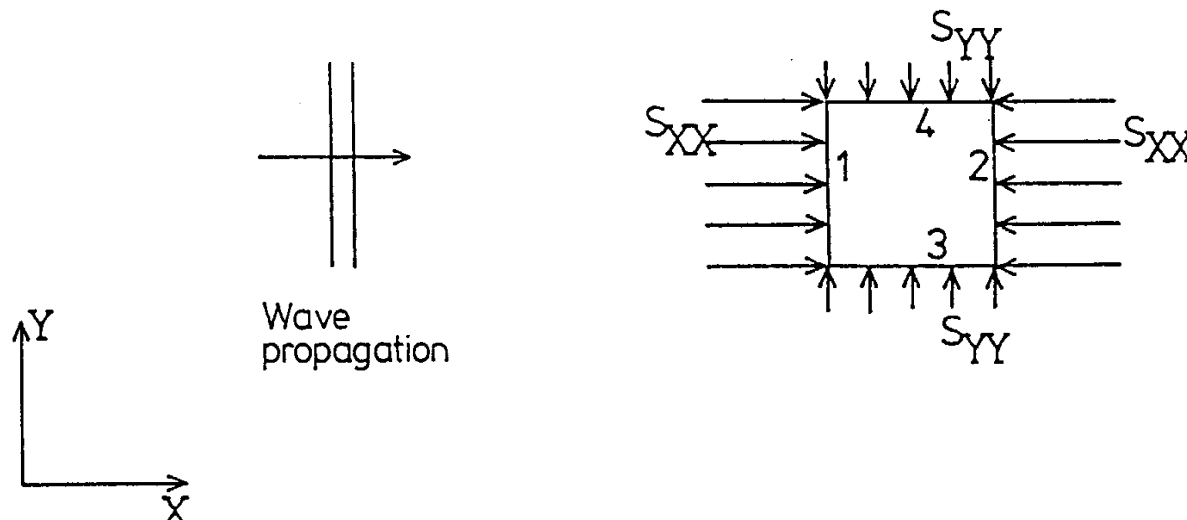
$$S_{yy} = \frac{1}{2} E$$

<i>Condizioni</i>	<i>Fattore importante per il radiation stress</i>
Acque profonde	H
Acque intermedie	H, h, L
Acque basse	E, h (attraverso il frangimento)

IL RADIATION STRESS (7/7)

Si consideri adesso una colonna d'acqua a base quadrata racchiusa da quattro piani verticali principali. Se le condizioni d'onda, così come le profondità, sono identiche in tutti i quattro piani 1, 2, 3 e 4, le componenti del radiation stress sulle facce opposte della colonna sono identiche e, pertanto, non si mobilita nessuna forza aggiuntiva.

Solamente se le condizioni d'onda variano tra i piani 1 e 2, o tra i piani 3 e 4, si innescherà una forza.



ATTACCO FRONTALE DEL MOTO ONDOSO (1/3)

Esempio: Calcolo del radiation stress nel caso di attacco frontale (le caratteristiche dell'onda cambiano per effetto dello shoaling e del frangimento)

Dati:

- pendenza del fondo $s = 0.01$ (fondo assunto piano);
- $H_o = 5\text{m}$;
- $T = 11\text{ s}$.

Si calcola, in sequenza:

- la lunghezza d'onda in acque profonde dalla relazione: $L_o = 1.56T^2 = 225\text{m}$;
- il parametro

$$\tilde{\beta}_o = \frac{s}{\sqrt{\frac{H_o}{L_o}}} = 0.067$$

(che nella fattispecie individua una figura di frangimento del tipo “spilling”);

- l'indice di frangimento $\gamma = \frac{H_b}{h_b}$, spesso calcolato tramite l'espressione di (Battjes; 1974)

$$\gamma = \tilde{\beta}_o^{0.17} + 0.08 = 0.71$$

ATTACCO FRONTALE DEL MOTO ONDOSO (2/3)

Si stima il radiation stress utilizzando le seguenti espressioni:

- distanza dalla costa: $y = \frac{h}{s}$;

- L = lunghezza d'onda, calcolata dalla relazione di dispersione;

- $n = \frac{kh}{\sinh(2kh)} + \frac{1}{2}$

- $k_{sh} = \sqrt{\frac{1}{\tanh(kh) \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)}}$;

- H = altezza d'onda, ricavata - fino al frangimento - tramite il coefficiente di shoaling e l'altezza d'onda su profondità infinita. Il frangimento è stato valutato in funzione della ripidità dell'onda, ossia in funzione dell'espressione $\left[\frac{H}{L}\right]_{max} = \frac{1}{7} \tanh(kh)$

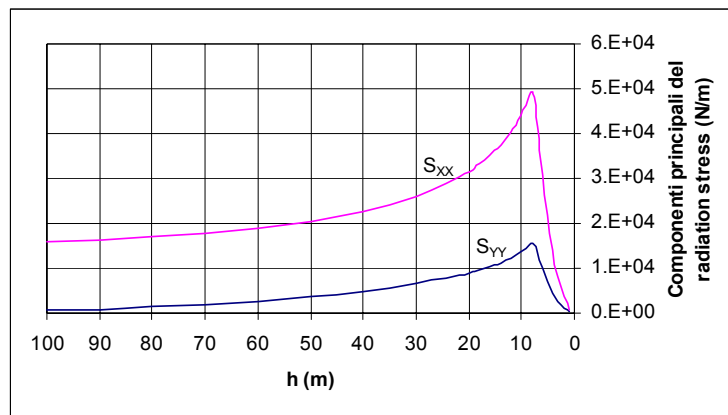
- $E = \frac{1}{8} \rho g H^2$;

- $S_{XX} = \left(2n - \frac{1}{2}\right)E$

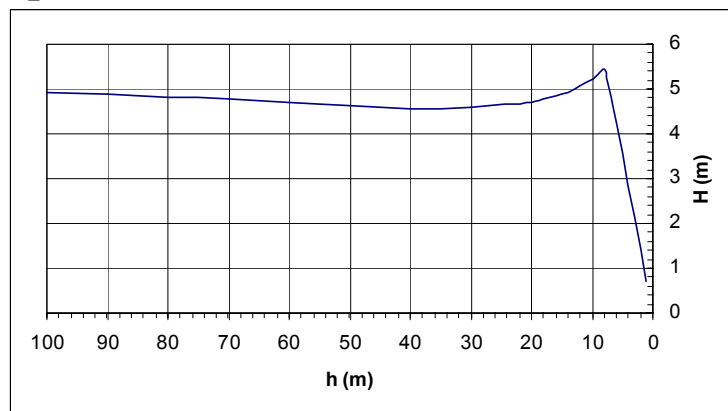
- $S_{YY} = \left(n - \frac{1}{2}\right)E$

ATTACCO FRONTALE DEL MOTO ONDOSO (3/3)

Andamento delle componenti del radiation stress S_{XX} e S_{YY} in funzione della profondità



Andamento dell'altezza d'onda in funzione della profondità



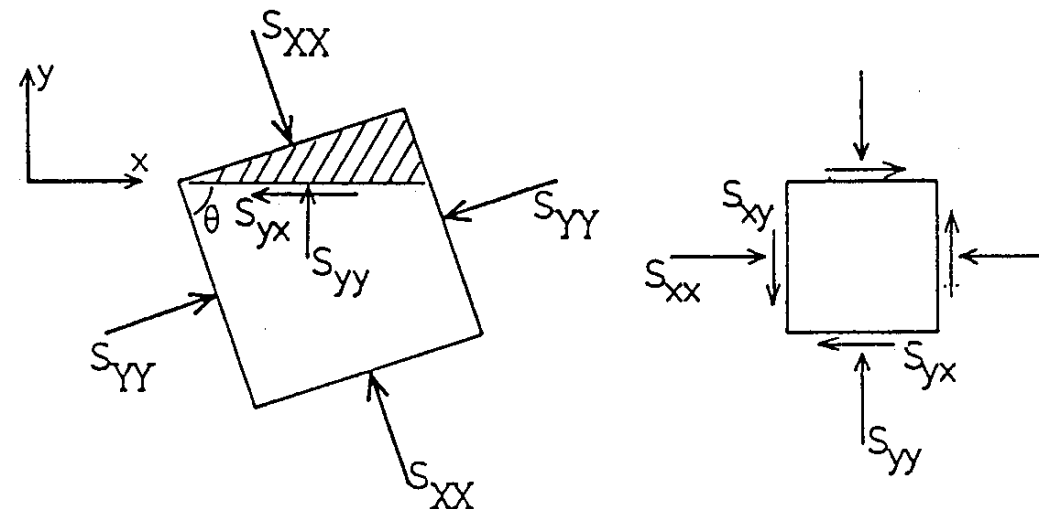
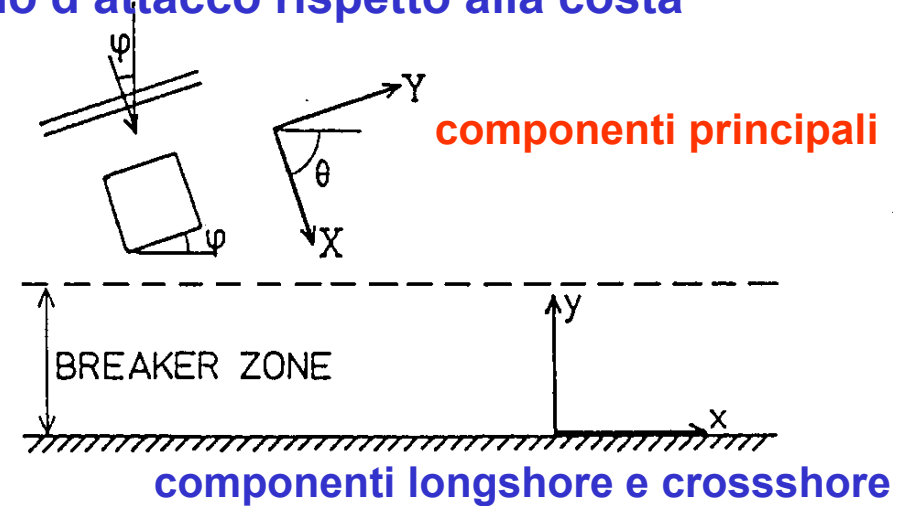
y (m)	h (m)	L (m)	c (m/s)	n (-)	k _{sh}	H(m)	E (N/m)	S _{xx} (N/m)	S _{yy} (N/m)
10000	100	222.74	18.56	0.52	0.98	4.92	29656	16015	593
9000	90	221.66	18.47	0.53	0.98	4.88	29188	16406	906
8000	80	219.85	18.32	0.55	0.97	4.83	28566	16982	1349
7000	70	216.87	18.07	0.57	0.95	4.76	27798	17805	1953
6000	60	212.10	17.68	0.60	0.94	4.69	26946	18954	2741
5000	50	204.71	17.06	0.64	0.92	4.62	26139	20539	3735
4000	40	193.55	16.13	0.69	0.91	4.57	25596	22757	4980
3000	30	177.01	14.75	0.76	0.92	4.58	25693	26041	6597
2000	20	152.34	12.70	0.83	0.94	4.72	27253	31562	8968
1900	19	149.25	12.44	0.84	0.95	4.74	27560	32345	9283
1800	18	146.02	12.17	0.84	0.95	4.77	27910	33193	9619
1700	17	142.63	11.89	0.85	0.96	4.81	28307	34114	9980
1600	16	139.08	11.59	0.86	0.97	4.85	28760	35122	10371
1500	15	135.34	11.28	0.87	0.98	4.89	29278	36229	10795
1400	14	131.16	10.93	0.88	0.99	4.94	29842	37391	11235
1300	13	127.04	10.59	0.88	1.00	4.99	30526	38758	11747
1200	12	122.68	10.22	0.89	1.01	5.06	31320	40293	12316
1100	11	118.06	9.84	0.90	1.03	5.13	32248	42033	12955
1000	10	113.14	9.43	0.91	1.04	5.22	33342	44031	13680
900	9	107.88	8.99	0.92	1.06	5.32	34649	46355	14515
800	8	102.22	8.52	0.93	1.09	5.44	36232	49105	15494
700	7	96.10	8.01	0.94	1.12	4.97	30259	41542	13206
600	6	89.41	7.45	0.95	1.15	4.26	22231	30915	9900
500	5	82.03	6.84	0.95	1.20	3.55	15438	21745	7013
400	4	73.73	6.14	0.96	1.26	2.84	9880	14095	4577
300	3	64.16	5.35	0.97	1.34	2.13	5558	8029	2625
200	2	52.65	4.39	0.98	1.47	1.42	2470	3614	1189
100	1	37.41	3.12	0.99	1.74	0.71	618	915	303

ATTACCO OBLIQUO DEL MOTO ONDOSO (1/2)

Se le onde si propagano con un angolo d'attacco rispetto alla costa

Bisogna ricordare che le componenti del radiation stress S_{XX} e S_{YY} si riferiscono, rispettivamente, alla **direzione di propagazione dell'onda** e nella **direzione a questa ortogonale**.

Tuttavia, poiché i processi costieri vengono studiati e individuati riferendosi alle **componenti longshore**, ovvero alle **componenti cross-shore**, è opportuno ricavare le componenti del radiation stress lungo dette direzioni.



ATTACCO OBLIQUO DEL MOTO ONDOSO (2/2)

Indicando con:

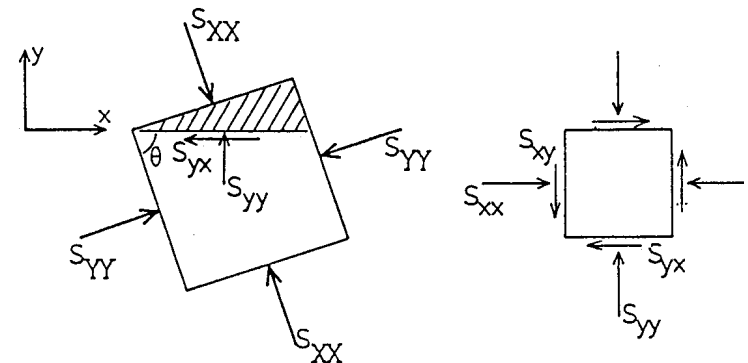
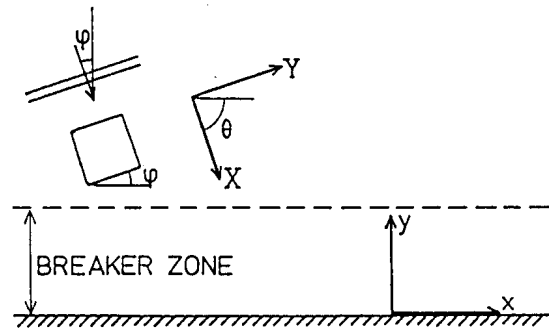
- S_{XX} = radiation stress principale agente sul piano parallelo alla cresta dell'onda;
- S_{YY} = radiation stress principale agente sul piano ortogonale alla cresta dell'onda;
- S_{xx} = radiation stress che agisce sul piano ortogonale alla costa;
- S_{yy} = radiation stress che agisce sul piano parallelo alla costa;
- S_{xy} = radiation stress che agisce sul piano ortogonale alla costa;
- S_{yx} = radiation stress che agisce sul piano parallelo alla costa;
- θ = angolo tra gli assi dei due sistemi;
- φ = angolo tra la cresta d'onda e la linea di costa.

Si ricava:

$$S_{xx} = \frac{S_{XX} + S_{YY}}{2} + \frac{S_{XX} - S_{YY}}{2} \cos(2\theta);$$

$$S_{yy} = \frac{S_{XX} + S_{YY}}{2} - \frac{S_{XX} - S_{YY}}{2} \cos(2\theta);$$

$$S_{xy} = \frac{S_{XX} - S_{YY}}{2} \sin(2\theta) = \frac{S_{XX} - S_{YY}}{2} \cos(2\varphi) = S_{yx};$$

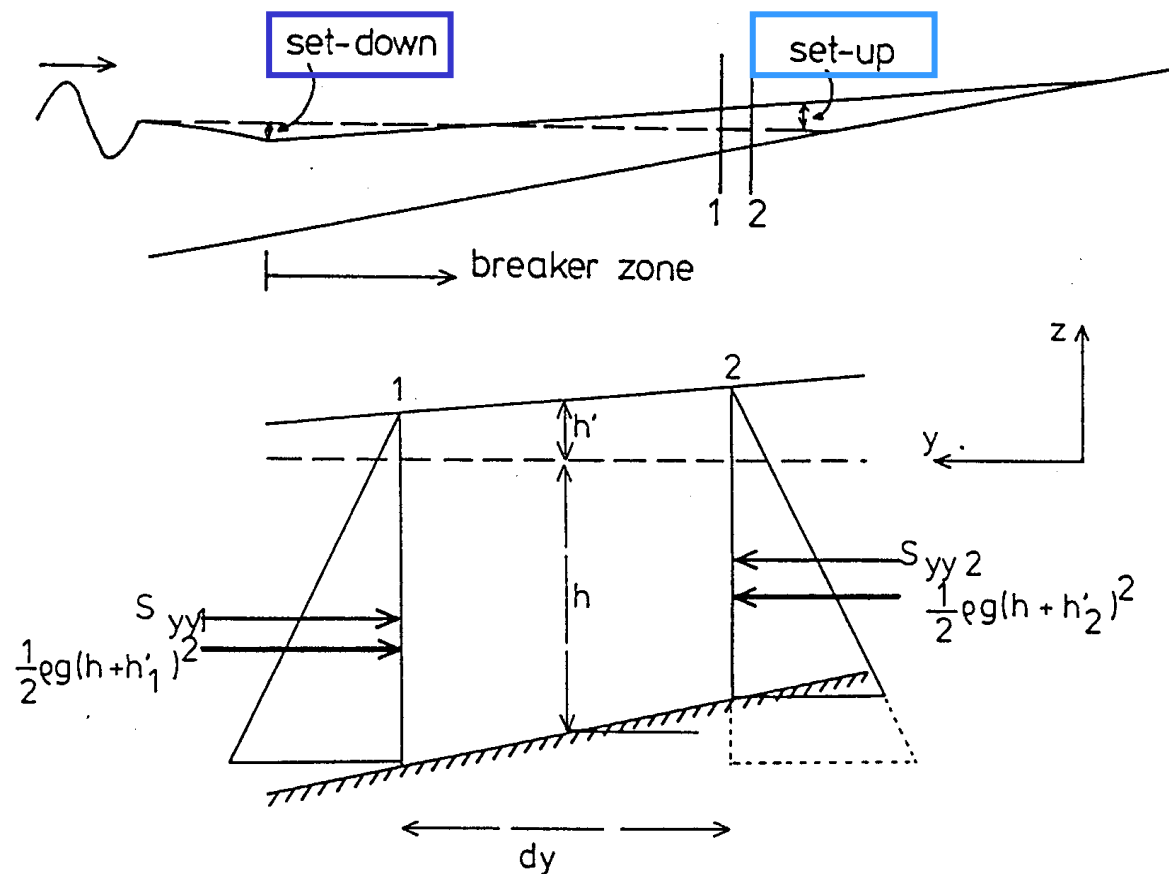


INFLUENZA DELLA COMPONENTE S_{yy} (1/2)

Le onde che si propagano verso la riva sono sottoposte a cambiamenti dovuti ai fenomeni di rifrazione, diffrazione, shoaling e frangimento. Poiché le componenti del radiation stress sono direttamente espressi in termini dei parametri del moto ondoso, è lecito attendersi alcuni cambiamenti su dette componenti e, di conseguenza, anche degli effetti legati a detti cambiamenti.

Uno degli effetti più immediati legato ai citati cambiamenti delle componenti del radiation stress riguarda **il livello medio del mare lungo la direttrice ortogonale alla linea di costa**.

Di seguito saranno analizzati i cambiamenti del livello medio del mare h' dovuti ad onde che si propagano ortogonalmente alla costa, ossia soggette solo al processo di shoaling (**set-down e set-up**).



INFLUENZA DELLA COMPONENTE S_{yy} (2/2)

La componente del radiation stress che bisogna analizzare nel caso in questione è la S_{yy} che, nella fattispecie di attacco frontale del moto ondoso, coincide con la componente S_{xx} . Cambiamenti in questa componente produrranno **una forza sulla colonna d'acqua** che sarà equilibrata da un **gradiente orizzontale di pressione statica prodotto da una variazione di livello d'acqua**:

$$\frac{dS_{yy}}{dy} + \rho g(h + h') \frac{dh'}{dy} = 0;$$

dove:

- S_{yy} è la componente del radiation stress ortogonale alla linea di costa;
- y è la coordinata nella direzione perpendicolare alla linea di costa;
- ρ è la densità dell'acqua;
- g è l'accelerazione di gravità;
- h è la profondità d'acqua alla distanza y dalla costa riferita al livello medio del mare in quiete (ossia in assenza di onde);
- h' rappresenta il **cambiamento di profondità locale medio** alla distanza y dalla costa prodotto dalla presenza delle onde.

II SET DOWN (1/3)

Nella regione esterna alla “surf zone” le dissipazioni di energia, in prima battuta possono essere trascurate. Il bilancio di energia si riduce quindi alla seguente espressione:

$$Enc = \text{costante} = E_o n_o c_o$$

da cui è possibile calcolare le variazioni di E rispetto ad y . Di conseguenza la componente S_{yy} ($=S_{xx}$) può essere calcolata contestualmente alle variazioni di n (funzione di y). Adottando come condizione iniziale $h'=0$ in acque profonde, si ricava:

$$h' = -\frac{1}{8} \frac{kH^2}{\sinh(2kh'')};$$

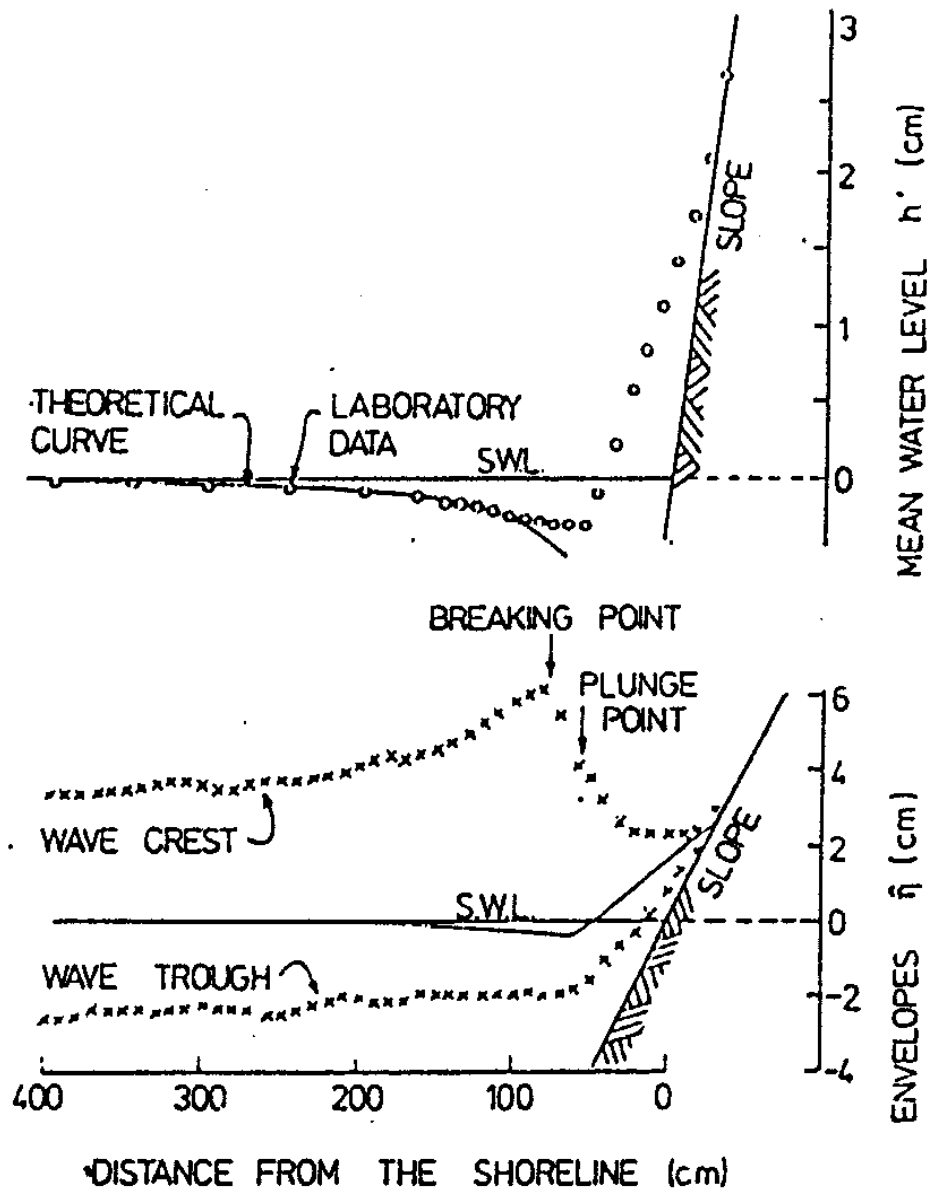
dove:

- H è l'altezza d'onda locale ($H=k_s H_o$);
- k è il numero d'onda;
- h'' la profondità media locale.

Si ha una **diminuzione di livello medio del mare man mano che si procede verso la costa**. Tale fenomeno è detto “**set-down**”.

Il valore di h' predetto è in buon accordo con i risultati sperimentali eccetto che in prossimità della linea di frangimento.

II SET DOWN (2/3)



In **acque molto basse** ($kh \ll 1$) si ottiene:

$$h' = -\frac{1}{16} \frac{H^2}{h''};$$

In **prossimità della linea di frangimento** l'altezza d'onda è ricavata dalla condizione di frangimento ($H = H_b = \gamma h_b$).

$$h'_b = -\frac{1}{16} \frac{H_b^2}{h_b} = -\frac{1}{16} \gamma H_b = -\frac{1}{16} \gamma^2 h_b;$$

II SET DOWN (3/3)

Per $\gamma=0.8$, si ricava:

$$h'_b \approx -\frac{1}{20} H_b \approx -\frac{1}{25} h_b;$$

tuttavia valori osservati di set down al frangimento sono risultati più piccoli del valore espresso dalla precedente. Tali differenze possono essere ascritte all'adozione della teoria lineare anche in prossimità del frangimento, ossia laddove tale teoria cessa di essere valida.

Si evince quindi che in prossimità del frangimento vi è un abbassamento del livello medio del mare proporzionale a γ e H_b .

Nota

Per un'assegnata altezza d'onda su profondità infinita H_o , l'esatto valore del set-down dipende da parecchi parametri (pendenza della spiaggia e periodo dell'onda) attraverso l'indice di frangimento γ .

II SET-UP (1/7)

Quando si verifica **un frangimento di tipo “spilling”**, la relazione diretta tra altezza d’onda e profondità d’acqua rimane valida anche attraverso la cosiddetta “breaker-zone”:

$$H(y) = \gamma[h(y) + h'(y)]$$

dove:

- $H(y)$ è l’altezza d’onda nel punto y ;
- $h(y)$ è la profondità locale al punto y calcolata rispetto al livello di quiete;
- $h'(y)$ è la variazione locale di profondità al punto y dovuta alla presenza del moto ondoso.

Adottando l’approssimazione per acque basse ($n=1$) si ricava:

$$S_{yy} = (2n - 1/2)E = 3/2E = 3/2(1/8)\rho g H^2 = (3/16)\gamma^2 \rho g (h + h')^2;$$

si ricava:

$$3/8\gamma^2 \rho g (h + h') \frac{d(h + h')}{dy} + \rho g (h + h') \frac{dh'}{dy} = 0$$

II SET UP (2/7)

Per il **gradiente del set-up** si ricava:

$$\frac{dh'}{dy} = -3/8\gamma^2 \frac{d(h + h')}{dy}$$

che espressa in termini di pendenza del fondo “s” può essere riscritta come segue:

$$\frac{dh'}{dy} = -\frac{(3/8)\gamma^2}{1 + (3/8)\gamma^2} s$$

Si può notare da quest'ultima come vi sia un **aumento della profondità media del mare** (come risultato di una diminuzione dei valori di S_{yy} conseguenti alla riduzione di altezza d'onda). Il **gradiente è proporzionale alla pendenza**.

L'**aumento totale del livello medio del mare** nella cosiddetta “surf zone” può essere calcolato integrando la precedente equazione dal frangimento al punto di massimo set-up.

Tale integrazione porge:

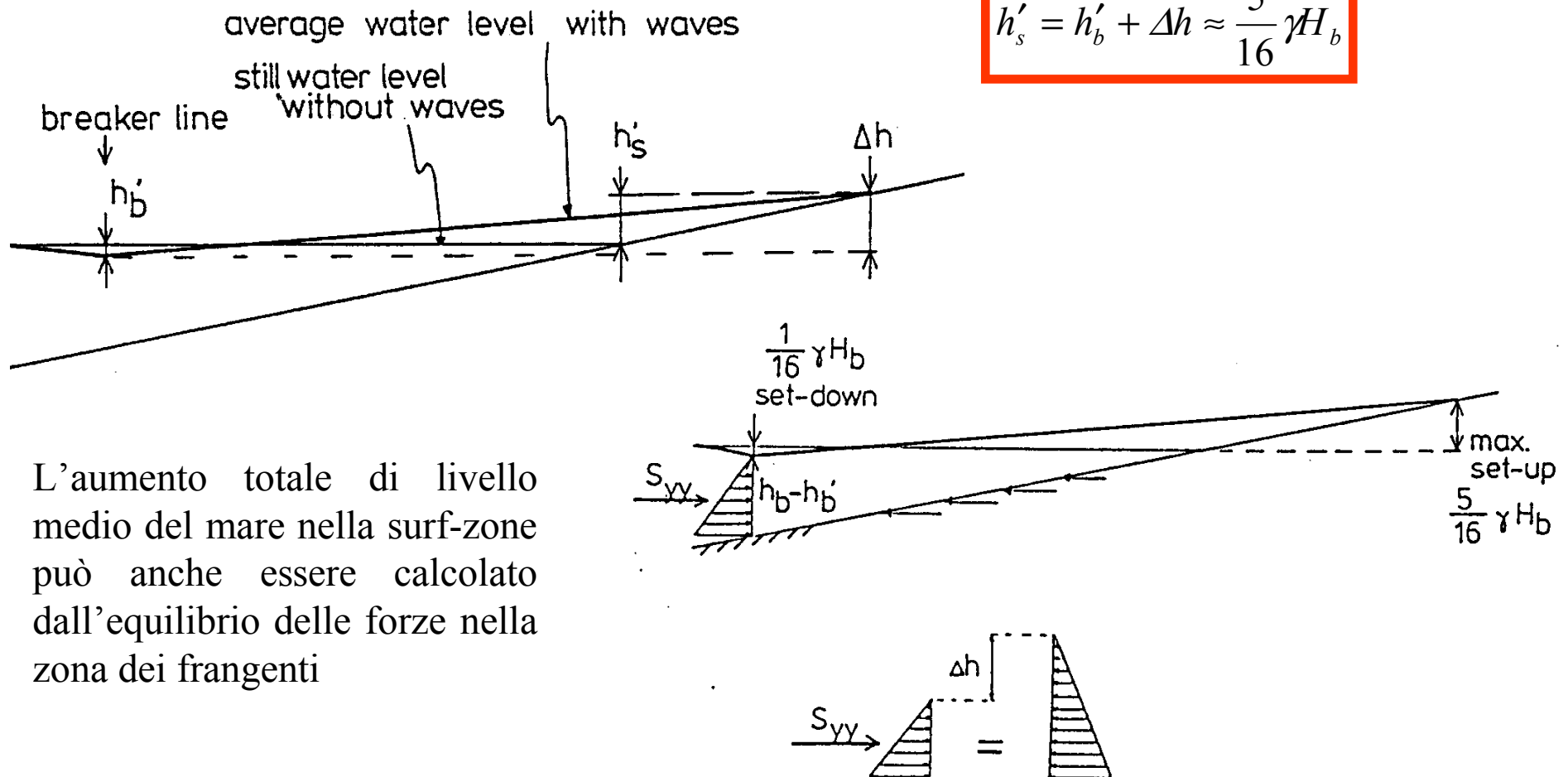
$$\Delta h = 3/8\gamma^2 h_b$$

dove Δh rappresenta la variazione di livello medio del mare a partire dal frangimento. Poiché **Δh è positivo**, è lecito attendersi un **aumento di livello medio del mare man mano che ci si avvicina alla linea di spiaggia**.

II SET UP (3/7)

Ricordando che il livello medio del mare in prossimità della linea di frangimento è inferiore al livello di quiete, si ricava che il valore assoluto del livello del mare relativo alla condizione di quiete è dato dalla relazione seguente:

$$h'_s = h'_b + \Delta h \approx \frac{5}{16} \gamma H_b$$



L'aumento totale di livello medio del mare nella surf-zone può anche essere calcolato dall'equilibrio delle forze nella zona dei frangenti

II SET UP (4/7)

In formule:

forza idrostatica + **radiation stress** = forza idrostatica lungo il fondo

$$\frac{1}{2} \rho g h_b^2 + (3/16) \gamma^2 \rho g h_b^2 = \frac{1}{2} \rho g h_b (h_b + \Delta h);$$

da cui si ricava:

$$\Delta h = \frac{3}{8} \gamma^2 h_b = \frac{3}{8} \gamma H_b;$$

Onde irregolari

Il set-up è un fenomeno che segue all'azione di numerosi treni d'onda. Nel caso di onde irregolari il problema che sorge è quello di selezionare la giusta altezza d'onda per calcolare correttamente il set-up. Infatti le altezze più alte sono troppo poco frequenti per poter dare un contributo significativo al set-up. Viene suggerito ai fini progettuali l'adozione della radice quadratica media dell'altezza d'onda o H_{rms} (SPM, 1984).

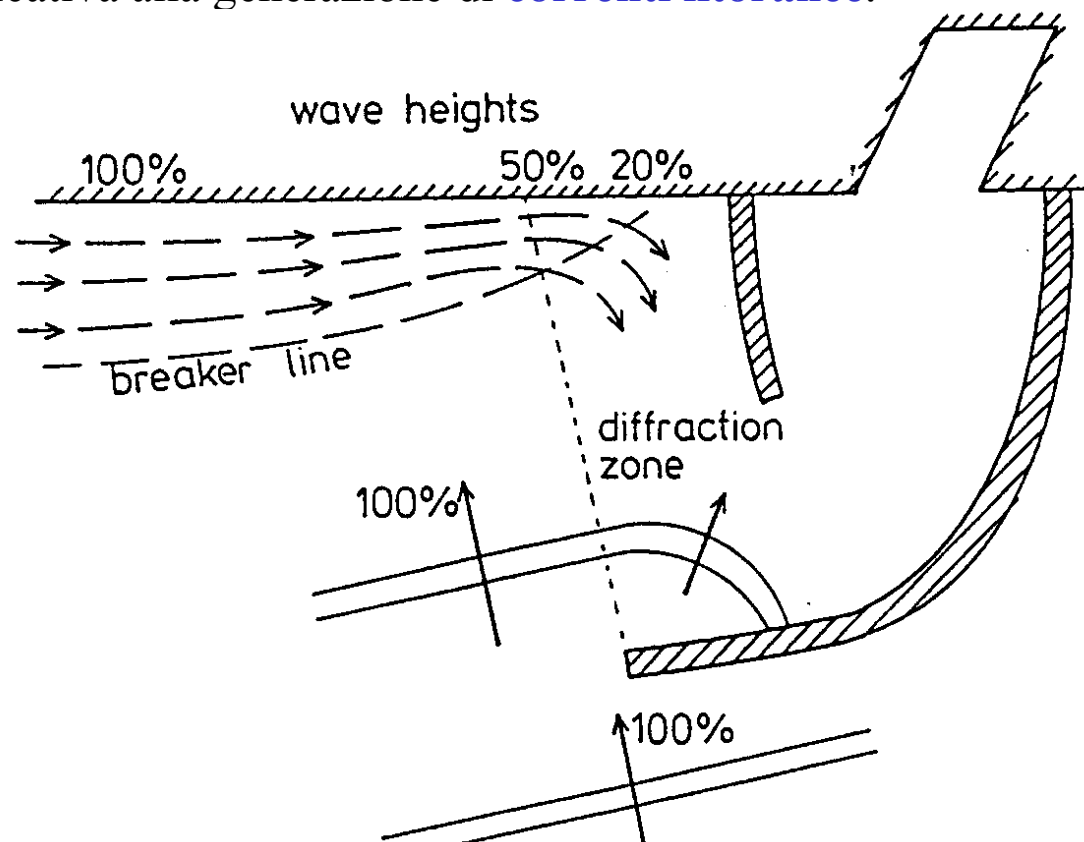
Set-up dovuto al moto ondoso e set-up dovuto al vento

Il set-up provocato dal moto ondoso non ha nulla a che vedere con il set-up provocato dall'azione del vento. I due fenomeni sono assolutamente non correlati tra loro, come dimostra peraltro il fatto che il primo è un fenomeno costiero, mentre il secondo agisce su ampie distese di fetch.

II SET UP (5/7)

Se le **condizioni del moto ondoso variano lungo la costa**, cosa che può accadere a seguito dei fenomeni di rifrazione, diffrazione, ovvero di cambiamento di figure di breaking (ossia di pendenza della spiaggia), il set-up varierà anch'esso lungo la costa. Si verranno in definitiva a stabilire livelli d'acqua differenti tra punti lungo la costa che, ovviamente, produrranno gradienti di pressione. Questi gradienti di pressione possono contribuire in maniera significativa alla generazione di **correnti litoranee**.

Si può vedere come sia possibile avere una corrente litoranea verso il porto prodotta dall'attacco obliquo del moto ondoso, nonostante a prima vista si direbbe che la corrente litoranea debba essere diretta in verso opposto.



II SET UP (6/7)

ESEMPIO: Calcolo del set-up

Dati:

- $s=0.01$;
- $H_o=5.0$ m;
- $T=11$ s;
- $\gamma=0.7$;
- $\phi=0^\circ$.

Per la determinazione della linea di frangimento è indispensabile adottare una procedura per tentativi che, secondo una strategia che sarà meglio definita nel seguito, fornisce:

- $h_b = 7.8$ m (profondità in corrispondenza del frangimento senza considerare il set-down);
- $H_b = 5.5$ m (altezza d'onda al frangimento).

Il set-down in corrispondenza dell'inizio della zona dei frangenti risulta:

$$h'_b = -\frac{1}{16}(0.7)^2(7.8) = -0.24m$$

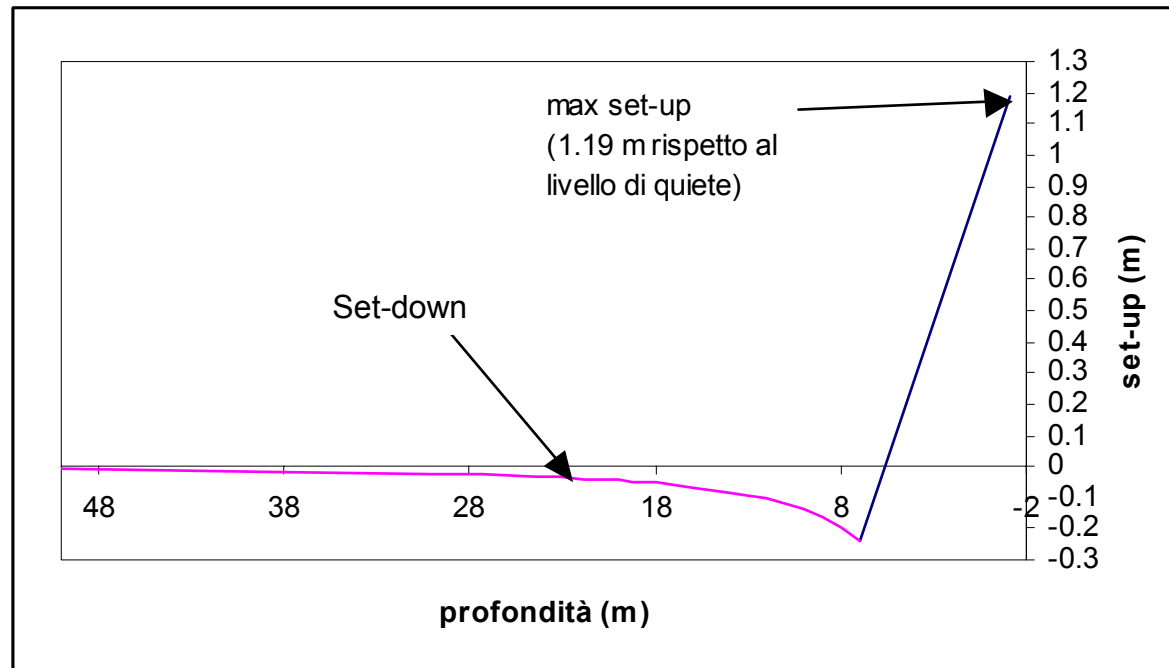
I cambiamenti di livello del mare attraverso la zona dei frangenti sono dati dall'espressione

$$\Delta h = \frac{3}{8}(0.7)^2(7.8) = 1.43m;$$

II SET UP (7/7)

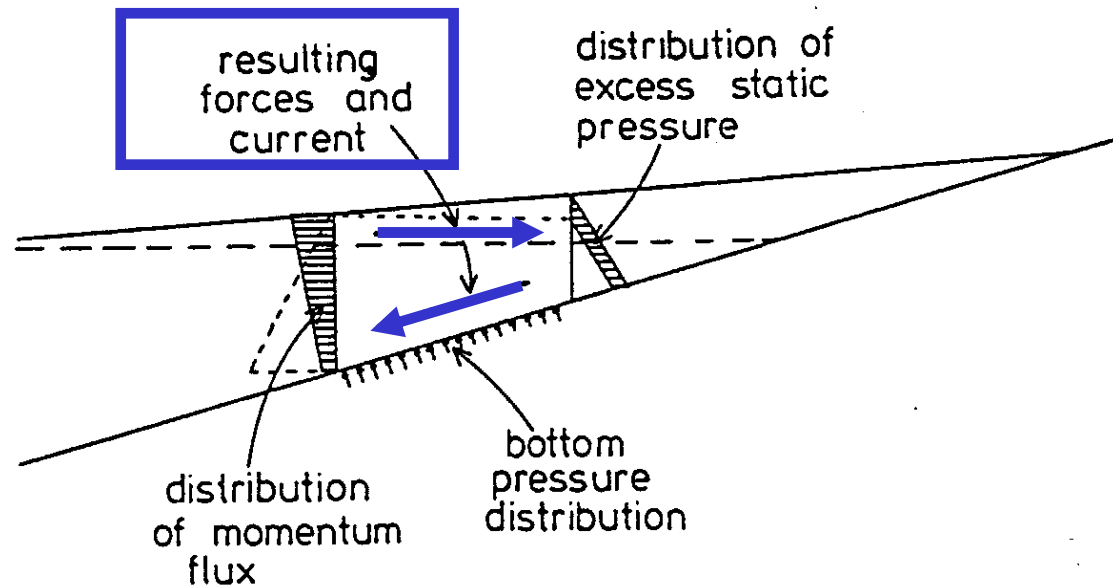
L'aumento di livello d'acqua in prossimità della costa, valutato rispetto alla condizione di quiete, è pari a:

$$h'_s = \Delta h + h'_b = 1.19m.$$



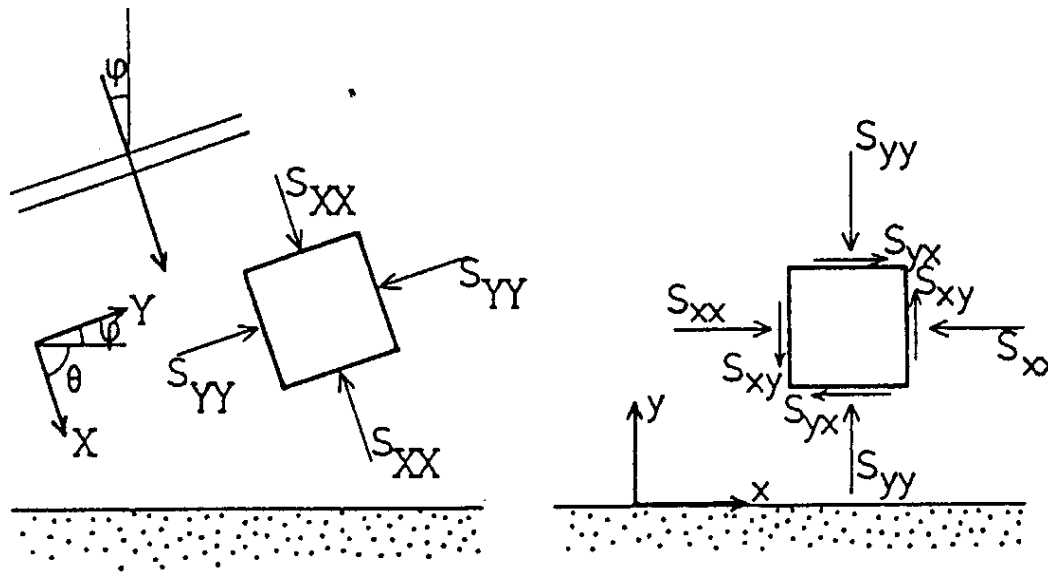
EFFETTI ULTERIORI DEL FRANGIMENTO

Oltre al fenomeno di set-up, il frangimento produce alcune correnti nella zona dei frangenti dovute al fatto che lungo la verticale si ha una variazione di flusso di quantità di moto legata al moto delle particelle d'acqua che passa da un massimo in prossimità della superficie ad un minimo al fondo. In definitiva si hanno delle correnti schematicamente rappresentate in figura.



INFLUENZA DELLA COMPONENTE S_{yx} RADIATION SHEAR STRESS (1/6)

La componente in oggetto **agisce parallelamente alla costa**. Cambiamenti in questa componente tangenziale del radiation stress producono una forza che agisce parallela alla costa e che produce la **corrente litoranea** (*longshore current* nella letteratura anglosassone).



Le componenti tangenziali del radiation stress hanno origine da un **attacco obliquo del moto ondoso**.

INFLUENZA DELLA COMPONENTE S_{yx} RADIATION SHEAR STRESS (2/6)

Poiché le onde che si avvicinano alla costa modificano le loro caratteristiche in acque intermedie, è opportuno individuare i cambiamenti nelle componenti tangenziali del radiation stress in questa zona, ossia al largo della zona dei frangenti. I passi essenziali sono riportati nel seguito.

Si è visto che:

$$S_{yx} = \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \sin(2\theta);$$

Ricordando che le componenti principali sono:

$$S_{xx} = \left(2n - \frac{1}{2}\right)E$$

$$S_{yy} = \left(n - \frac{1}{2}\right)E$$

e che $\vartheta + \varphi = \pi / 2$ per la **componente tangenziale del radiation stress** si ricava:

$$S_{yx} = \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \sin(2\theta) = \frac{En}{2} \sin(2\varphi) = En \sin(\varphi) \cos(\varphi)$$

INFLUENZA DELLA COMPONENTE S_{yx} RADIATION SHEAR STRESS (3/6)

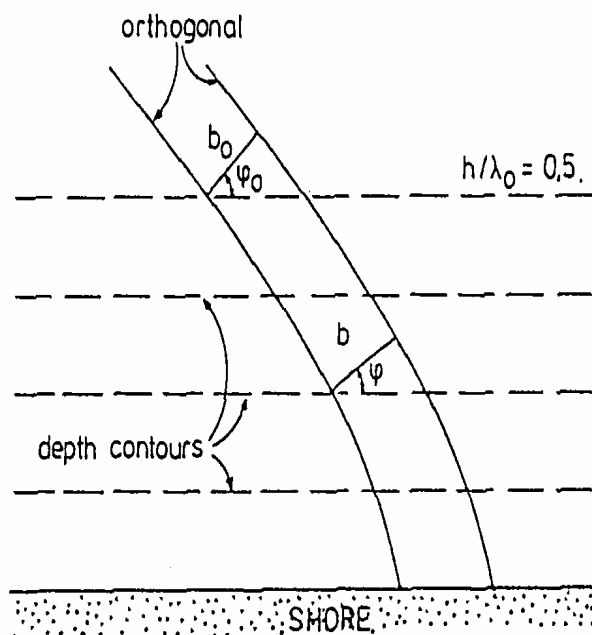
Dalla teoria della rifrazione si ha che:

$$Encb = \text{costante} = E_o n_o c_o b_o$$

valida fuori dalla regione dei frangenti e in cui:

- c è la celerità dell'onda;
- b è la distanza tra due ortogonali d'onda.

Inoltre è stato anche ricavato:



$$\frac{\sin(\varphi)}{c} = \frac{\sin(\varphi_o)}{c_o}$$

$$\frac{\cos(\varphi)}{b} = \frac{\cos(\varphi_o)}{b_o}$$

legge di Snell

INFLUENZA DELLA COMPONENTE S_{yx} RADIATION SHEAR STRESS (4/6)

Si ricava:

$$bc = \frac{(b_o c_o)}{\sin(\varphi_o) \cos(\varphi_o)} \sin(\varphi) \cos(\varphi)$$

sostituendo la legge di Snell si ottiene quindi un risultato piuttosto sorprendente:

$$S_{yx} = E_o n_o \sin(\varphi_o) \cos(\varphi_o) = \text{costante}$$

e pertanto **la forza proporzionale a dS_{yx}/dy è zero anche se le caratteristiche del moto ondoso cambiano prima della surf zone.**

INFLUENZA DELLA COMPONENTE S_{yx} RADIATION SHEAR STRESS (5/6)

Ovviamente nella surf zone bisogna effettuare un'analisi diversa. Ricordando che:

$$S_{yx} = E n \sin(\varphi) \cos(\varphi)$$

sostituendo la legge di Snell, si ricava:

$$S_{yx} = E n c \cos(\varphi) \frac{\sin(\varphi_o)}{c_o}$$

Ricordando sia l'espressione per $E = 1/8 \rho g H^2$, sia il criterio di breaking valido in questa regione ($H_b = \gamma h_b$), la precedente porge:

$$S_{yx} = \frac{1}{8} \frac{\sin(\varphi_o)}{c_o} \rho g \gamma^2 \underbrace{\left[h^2 n c \cos(\varphi) \right]}_{f(y)}$$

in cui solo i termini entro la parentesi quadra dipendono da y , per cui, differenziando, si ottiene:

$$\frac{dS_{yx}}{dy} = \frac{1}{8} \frac{\sin(\varphi_o)}{c_o} \rho g \gamma^2 \cdot \left[2hnc \cos(\varphi) \frac{dh}{dy} + h^2 c \cos(\varphi) \frac{dn}{dy} + h^2 n \cos(\varphi) \frac{dc}{dy} - h^2 n c \sin(\varphi) \frac{d\varphi}{dy} \right]$$

valida, si ribadisce, **solo all'interno della surf-zone**.

INFLUENZA DELLA COMPONENTE S_{yx} RADIATION SHEAR STRESS (6/6)

Adottando le approssimazioni valide **in acque basse**, ossia nella fattispecie:

$$\begin{aligned}n &= 1; & dn/dy &= 0; \\ \cos(\varphi) &= 1; & d\varphi/dy &= 0; \\ c &= \sqrt{gh}; & \frac{dc}{dy} &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{h}} \frac{dh}{dy};\end{aligned}$$

L'espressione di S_{yx} si semplifica:

$$\frac{dS_{yx}}{dy} = \frac{1}{8} \frac{\sin(\varphi_o)}{c_o} \rho g \gamma^2 \cdot \left[2h\sqrt{gh} \frac{dh}{dy} + h^2 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{h}} \frac{dh}{dy} \right]$$

ovvero:

$$\frac{dS_{yx}}{dy} = \frac{1}{8} \frac{\sin(\varphi_o)}{c_o} \rho g \gamma^2 \cdot \left[2.5h\sqrt{gh} \frac{dh}{dy} \right] = \frac{5}{16} \rho \gamma^2 \cdot [gh]^{(3/2)} \frac{\sin(\varphi_o)}{c_o} s$$

dove: - c_o è la celerità dell'onda su profondità infinita;

- g è l'accelerazione di gravità;
- h è la profondità;
- s è la pendenza del fondo (pari a dh/dy);
- γ è l'indice di breaking;
- ρ è la densità;
- ϕ_o è l'angolo di attacco del moto ondoso in acque profonde.

FORZE DOVUTE ALL'ATTRITO (1/7)

Queste forze agiscono in presenza di correnti longitudinali e sono causate dall'attrito che la spiaggia esercita sulla colonna d'acqua soprastante. Dette forze sono ovviamente legate alle componenti di velocità delle particelle d'acqua. Tuttavia, nella zona dei frangenti è veramente difficile determinare dette componenti di velocità (assumendo drastiche semplificazioni).

In definitiva, semplificando notevolmente il problema, è possibile affermare che l'attrito ad una generica quota z_t dal fondo è dato dalle seguenti espressioni per le tensioni tangenziali, diversificate nel caso di onde, di correnti e di onde e correnti sovrapposte.

Correnti

$$\tau_c = \rho k^2 V_t^2$$

con:

$$V_t = \frac{V^*}{k} = \frac{\sqrt{g}}{kC} V$$

Onde

$$\tau_w = \rho k^2 u_t^2$$

con:

$$u_t = p u_o \sin(\omega t) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{f_w}{2}} u_o \sin(\omega t)$$

essendo u_o la velocità orbitale al fondo.

FORZE DOVUTE ALL'ATTRITO (2/7)

Onde e correnti

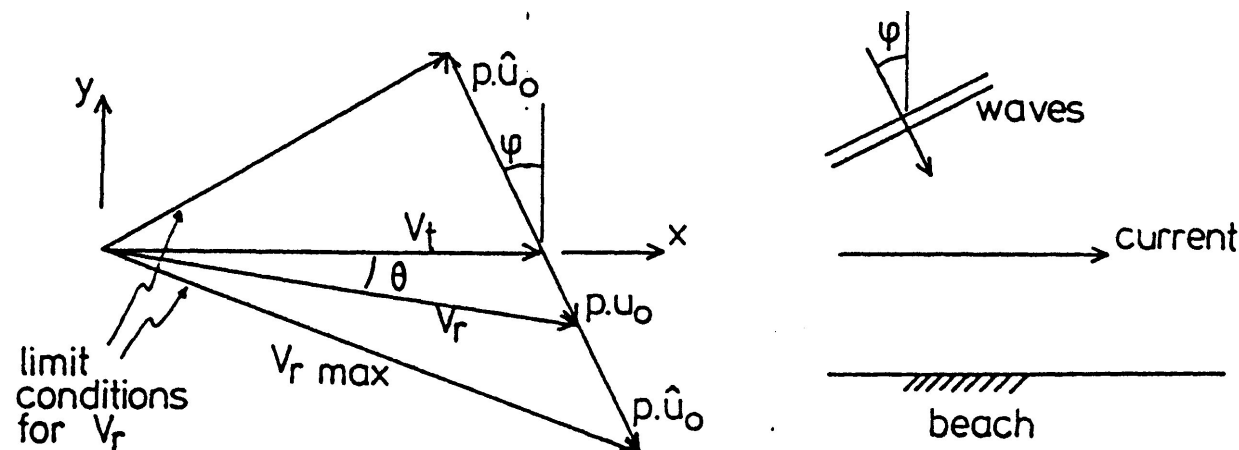
In questo caso la prima cosa da fare è determinare la velocità alla quota z_t come somma vettoriale del contributo della velocità dovuta al campo di moto prodotto dalle onde (u_t) e del contributo dovuto alla corrente (V_t). Assumendo che il moto ondoso attacchi con un angolo ϕ rispetto alla direzione della corrente, si ha :

$$\vec{V}_r = \vec{V}_t + \vec{u}_t$$

da cui:

$$V_r = \sqrt{V_t^2 + (pu_o \sin(\omega t))^2 + 2V_t pu_o \sin(\omega t) \sin(\phi)}$$

$$\cos(\vartheta) = \frac{V_t + pu_o \sin(\omega t) \sin(\phi)}{V_r}$$

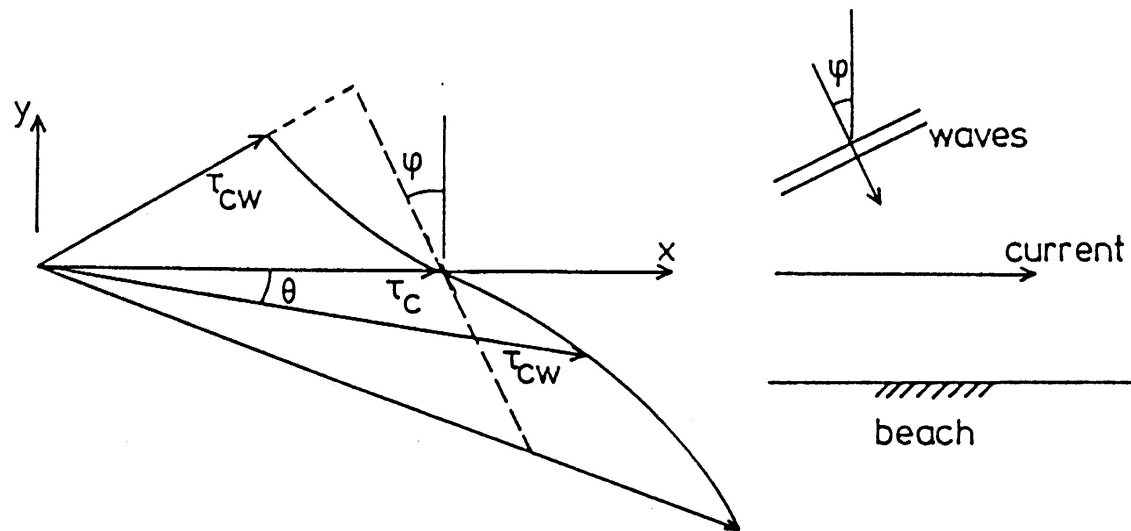


FORZE DOVUTE ALL'ATTRITO (3/7)

A questo punto risulta immediato la valutazione della tensione tangenziale dovuta alla contemporanea presenza di onde e correnti:

$$\tau_{cw} = \rho k^2 V_r^2$$

Ovviamente questa tensione tangenziale varia in ogni istante a causa delle componenti di velocità del moto ondoso, come riportato in figura.



Ai fini della valutazione del trasporto in sospensione o al fondo, non è tanto importante il valore istantaneo della tensione tangenziale, essendo quest'ultimo anche inferiore ai valori critici che mobilitano i sedimenti, quanto piuttosto il **valore medio temporale indipendente dalla direzione**.

FORZE DOVUTE ALL'ATTRITO (4/7)

Ricordando che:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) dt = 0;$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2};$$

si ha:

$$\overline{\tau_{cw}} = \rho k^2 \left(V_t^2 + \frac{1}{2} (pu_o)^2 \right)$$

u_o si ricorda essere la massima velocità al fondo (al di fuori dello strato limite) dovuta al moto ondoso. Inoltre, essendo $\tau_c = \rho k^2 V_t^2$ e $V_t = \frac{\sqrt{g}}{kC} V$, è stato ricavato dallo stesso Bijker:

$$\overline{\tau_{cw}} = \tau_c \left[1 + 1/2 \left(\xi \frac{u_o}{V} \right)^2 \right]$$

dove: $\xi = \frac{pkC}{\sqrt{g}} = C \sqrt{\frac{f_w}{2g}}$

essendo: $p = \sqrt{\frac{f_w}{2k^2}}$

FORZE DOVUTE ALL'ATTRITO (5/7)

La tensione tangenziale istantanea dovuta all'azione combinata di onde e correnti è, così calcolata, diretta secondo V_r . Tuttavia, **le correnti litoranee sono dirette lungo x e sono principalmente influenzate dalla componente lungo x di detta tensione tangenziale**, al contrario di quanto avviene per il trasporto di sedimenti che è, invece influenzato, dalla tensione tangenziale totale. Volendosi concentrare sulla componente x, si ha:

$$\tau_{cw x} = \tau_{cw} \cos(\vartheta)$$

ma $\tau_{cw} = \rho k^2 V_r^2$; mentre si è visto che $V_r = \sqrt{V_t^2 + (pu_o \sin(\omega t))^2 + 2V_t pu_o \sin(\omega t) \sin(\phi)}$
 e $\cos(\vartheta) = \frac{V_t + pu_o \sin(\omega t) \sin(\phi)}{V_r}$;

per cui:

$$\tau_{cw x} = \rho k^2 V_r [V_t + pu_o \sin(\omega t) \sin(\phi)]$$

Per ottenere il **valore medio temporale** bisogna integrare rispetto al tempo. L'integrale che si ottiene è il seguente:

$$\overline{\tau_{cw x}} = \frac{2\tau_c}{T} \cdot \int_{-T/4}^{T/4} \left\{ \left[1 + \xi \frac{u_o}{V} \sin(\omega t) \sin(\phi) \right] \cdot \left[1 + \left(\xi \frac{u_o}{V} \sin(\omega t) \right)^2 + 2\xi \frac{u_o}{V} \sin(\omega t) \sin(\phi) \right]^{0.5} \right\} dt \quad (61)$$

FORZE DOVUTE ALL'ATTRITO (6/7)

Bijker (1967) ha adottato una procedura numerica per stimare l'integrale per diversi valori delle variabili V , u_o , ξ e φ . Quindi, con una procedure del tipo "best fit", ha determinato le seguenti espressioni valide **per $\varphi < 20^\circ$** :

$$\overline{\tau_{cwx}} = \tau_c \left[0.75 + 0.45 \left(\xi \frac{u_o}{V} \right)^{1.13} \right]; \quad \overline{\tau_{cwx}} = \frac{\rho g V^2}{C^2} \left[0.75 + 0.45 \left(\xi \frac{u_o}{V} \right)^{1.13} \right].$$

Quest'ultima stabilisce una relazione tra la tensione tangenziale e la velocità, utilizzabile per determinare le caratteristiche di una longshore current determinata dal moto ondoso. Per ottenere un'espressione più agevole da utilizzare, basta introdurre l'approssimazione per cui ϕ (angolo formato dalle creste con la corrente litoranea) sia **molto piccolo**. Tale approssimazione risulta peraltro relativamente valida, basti pensare infatti al fenomeno di rifrazione. In formule tale ipotesi si traduce in un'ulteriore approssimazione, ossia si ipotizza che:

$$\varphi \rightarrow 0; \quad \sin(\varphi) \rightarrow 0$$

con tale approssimazione si ottiene la seguente formula:

$$\overline{\tau_{cwx}} = \frac{2\tau_c}{T} \cdot \int_{-T/4}^{T/4} \left\{ 1 + \left(\xi \frac{u_o}{V} \sin(\omega t) \right)^2 \right\}^{0.5} dt$$

FORZE DOVUTE ALL'ATTRITO (7/7)

Assumendo inoltre che:

$$\xi \frac{u_o}{V} \gg 1$$

è possibile risolvere l'integrale (trascurando la costante 1) che conduce alla seguente espressione:

$$\overline{\tau_{cwx}} = \frac{\rho}{\pi C} \sqrt{2gf_w} u_o V$$

Ovviamente l'applicabilità o meno della (66) ad un caso specifico dipende dalla validità delle semplificazioni introdotte ($\varphi \ll 1$ $\xi u_o/V \gg 1$). Se queste non dovessero essere verificate bisognerà risolvere il problema per via numerica.

Un'ulteriore semplificazione si può ottenere nell'ipotesi di onde su acque basse, per cui $u_o = \omega H / 2kh$. Infatti, utilizzando le relazioni:

$$H = h\gamma \text{ e } \frac{2\pi}{k} = L = \sqrt{gh}T = \sqrt{gh} \frac{2\pi}{\omega}$$

si ricava:

$$u_o = \frac{\gamma}{2} \sqrt{gh}$$

da cui:

$$\overline{\tau_{cwx}} = \frac{\rho g}{\sqrt{2}\pi C} \gamma \sqrt{h} \sqrt{f_w} V$$

CALCOLO DELLE CORRENTI LITORANEE (1/10)

Per la stima delle correnti litoranee, è opportuno formulare un'espressione basata sull'equilibrio delle forze d'attrito e di radiation stress che sono sempre presenti nella zona dei frangenti.

Si è visto che:

$$\frac{dS_{yx}}{dy} = \frac{5}{16} \rho \gamma^2 \cdot [gh]^{(3/2)} \frac{\sin(\phi_o)}{c_o} s$$

dove:

- c_o è la celerità dell'onda su profondità infinita;
- g è l'accelerazione di gravità;
- h è la profondità;
- s è la pendenza del fondo (pari a dh/dy);
- γ è l'indice di breaking;
- ρ è la densità;
- ϕ_o è l'angolo di attacco del moto ondoso in acque profonde.

All'interno della zona dei frangenti l'equilibrio delle forze è dato da:

$$\frac{dS_{yx}}{dy} = \overline{\tau_{cwx}}$$

CALCOLO DELLE CORRENTI LITORANEE (2/10)

Adottando l'espressione semplificata per la distribuzione delle tensioni tangenziali:

$$\overline{\tau_{cwx}} = \frac{\rho g}{\sqrt{2\pi C}} \gamma \sqrt{h} \sqrt{f_w} V$$

Si ricava l'espressione approssimata della velocità in funzione della distanza y dalla costa.
In formule:

$$\frac{\rho g}{\sqrt{2\pi C}} \gamma \sqrt{h} \sqrt{f_w} V = \frac{5}{16} \rho \gamma^2 \cdot [gh]^{(3/2)} \frac{\sin(\varphi_o)}{c_o} s$$

che risolta rispetto a V porge:

$$V = \frac{5\pi}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin(\varphi_o)}{c_o} \cdot \frac{C}{\sqrt{f_w}} \cdot \gamma \cdot \sqrt{g} \cdot h \cdot s$$

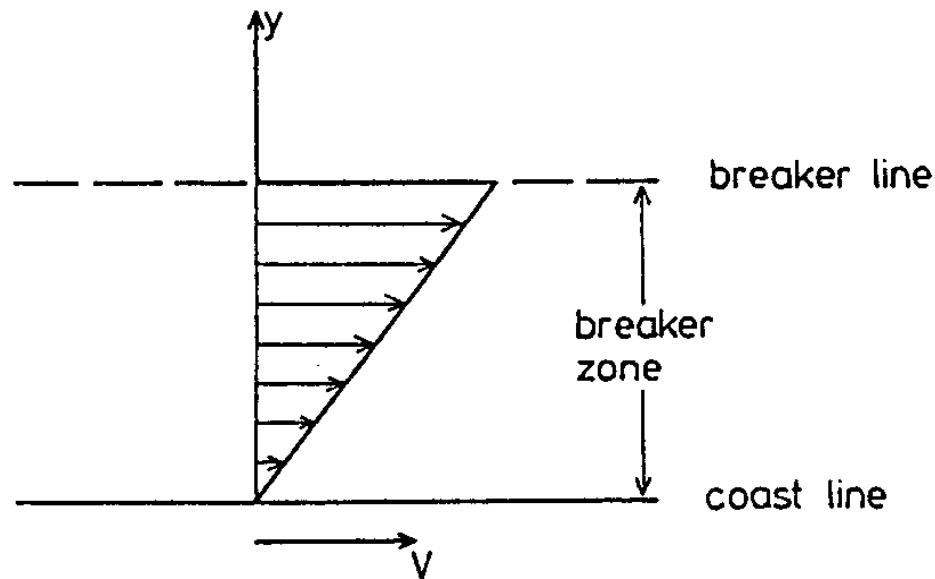
in cui:

- $5\pi / 8\sqrt{2} = 1.388$ è una costante;
- il rapporto $\sin(\varphi_o) / c_o$ dipende solo dalle condizioni su profondità infinita;
- γ dipende dalle condizioni del moto ondoso e dalla pendenza della spiaggia;
- $C / \sqrt{f_w}$ è un termine d'attrito dipendente dalla scabrezza del fondo, dalla profondità e dalle condizioni locali del moto ondoso;
- h ed s sono funzioni della distanza dalla spiaggia.

CALCOLO DELLE CORRENTI LITORANEE (3/10)

La dipendenza del **termine d'attrito** dalla profondità complica il problema, per cui molto spesso si assume che detto termine si mantenga **costante nella zona dei frangenti**. Se si accetta tale semplificazione, insieme all'assunto che la **spiaggia** mantenga una **pendenza costante**, si ricava per la **corrente litoranea un andamento lineare con la profondità**, ossia rispetto alla distanza dalla costa. E' ovvio che la velocità maggiore si avrà in corrispondenza del frangimento, come riportato in figura.

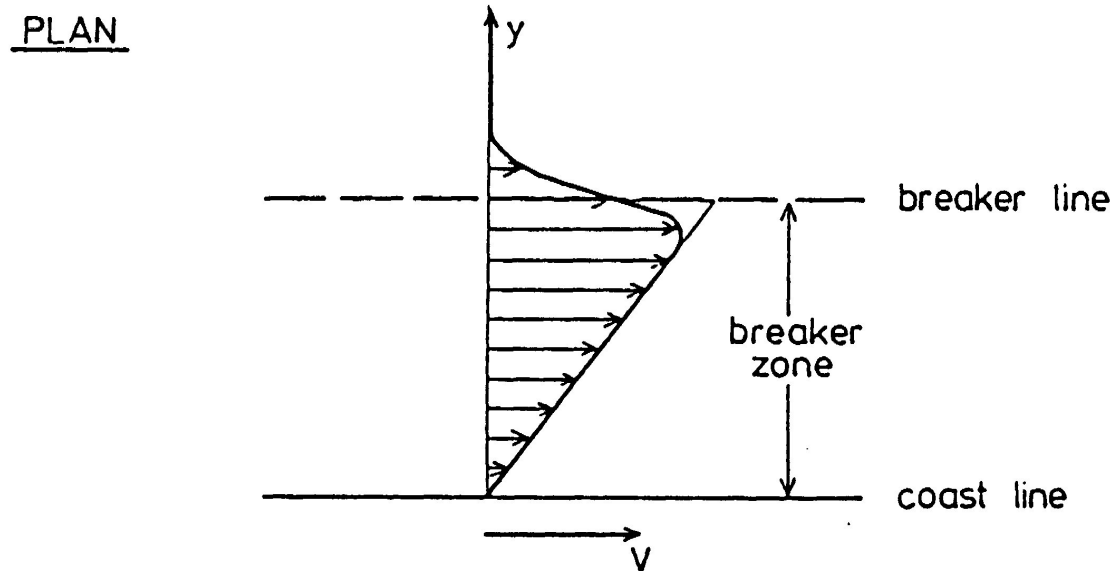
PLAN



Al di fuori della zona dei frangenti la velocità è nulla poiché ivi si ha che $\frac{dS_{yx}}{dy} = 0$.

CALCOLO DELLE CORRENTI LITORANEE (4/10)

Gli **effetti delle forze di turbolenza** dipendono dal gradiente della velocità, ossia da dV/dy . Poiché in corrispondenza della linea di frangimento detto gradiente è infinito, è verosimile attendersi un significativo effetto della turbolenza proprio in tale zona. Infatti, il trasferimento orizzontale di quantità di moto diminuirà la velocità nella zona esterna della zona dei frangenti producendo al contempo una corrente al di fuori della linea di frangimento come schematicamente riportato in figura.

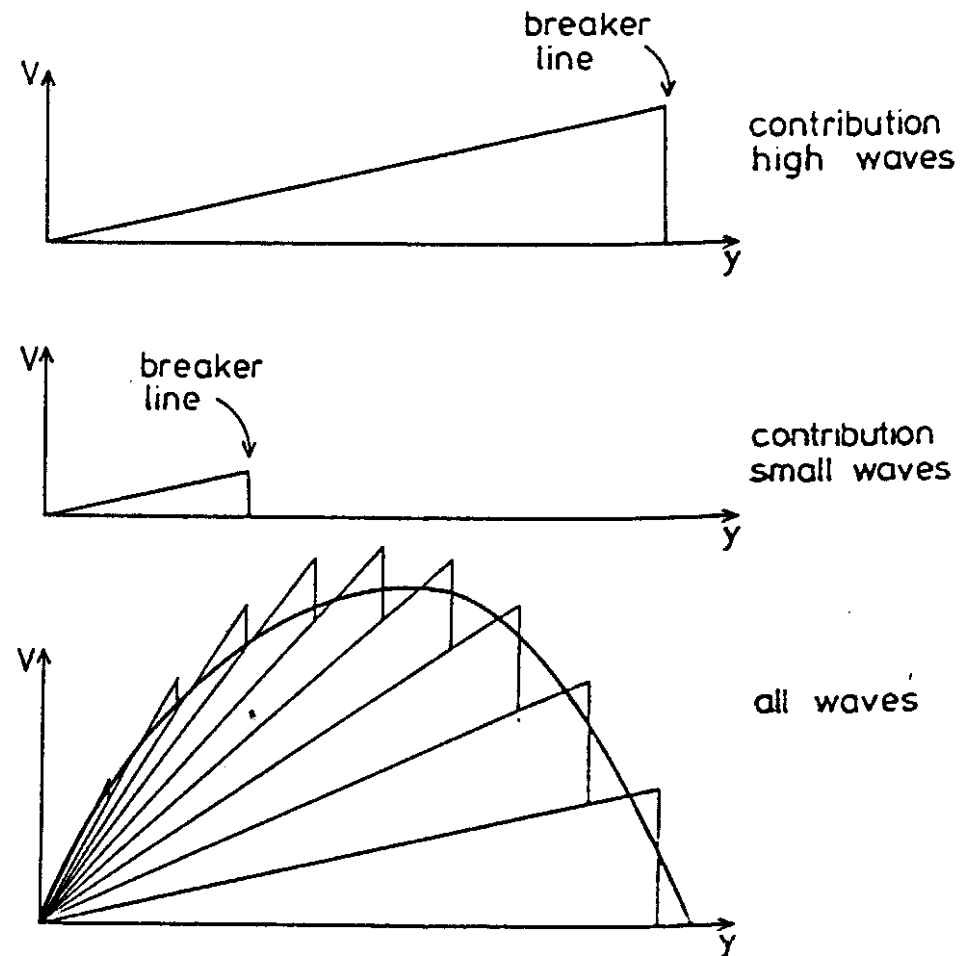


CALCOLO DELLE CORRENTI LITORANEE (5/10)

Onde irregolari

Nella realtà, le altezze d'onda, variando, non riescono a produrre una linea dei frangenti così definita. Per ogni onda il contributo alle forze che determinano le correnti litoranee comincia a farsi risentire al frangimento.

Poiché tuttavia ogni onda frange in un punto diverso, i contributi iniziano in punti diversi, ossia a distanze differenti dalla spiaggia. Tutti i contributi, assieme, risultano in una curva delle velocità simile a quella rappresentata in figura. E' ovvio che le influenze dovute: alla marea, alle caratteristiche dello spettro, alle variazioni di scabrezza del fondo, alle irregolari pendenze del fondo, nonché alle variazioni di attacco del moto ondoso, si traducono tutte in modifiche al profilo delle velocità della corrente litoranea.



CALCOLO DELLE CORRENTI LITORANEE (6/10)

ESEMPIO: Determinare la distribuzione della velocità (mediata sulla profondità) della corrente litoranea nella zona dei frangenti in funzione della distanza dalla spiaggia.

Dati:

- Onde regolari;
- batimetriche rettilinee e parallele;
- Periodo: $T = 7$ s;
- Altezza d'onda su profondità infinita: $H_o = 2.0$ m;
- Angolo d'attacco su profondità infinita: $\varphi_o = 30^\circ$;
- *Indice di frangimento*: $\gamma = 0.8$;
- *Pendenza della spiaggia*: $s = 0,01$;
- *Scabrezza del fondo*: $r = 0.06$ m (costante su tutta la zona).

CALCOLO DELLE CORRENTI LITORANEE (7/10)

Il primo passo è quello di definire la linea di frangimento. Le non linearità intrinseche al problema rendono impraticabile l'adozione di una soluzione in forma chiusa. Viene quindi suggerito il seguente approccio iterativo:

1. si ipotizza una profondità al frangimento h_b e si calcola di conseguenza il rapporto h_b/L_o ;
2. si determina il coefficiente di shoaling e il rapporto C/C_o ;
3. si calcola l'angolo d'attacco al frangimento utilizzando la relazione: $\sin(\varphi_b) = \frac{C}{C_o} \cdot \sin(\varphi_o)$;
4. si calcola l'altezza d'onda al frangimento attraverso l'espressione: $H_b = H_o K_{sh} \sqrt{\frac{\cos(\varphi_o)}{\cos(\varphi_b)}}$;
5. si stima un nuovo valore di h_b sapendo γ e H_b e si ritorna quindi al punto 1

Applicando il procedimento suddetto si ricava:

- $H_b = 2.07\text{m}$;
- $h_b = 2.59\text{m}$;
- $\varphi_b = 11.9^\circ$.

CALCOLO DELLE CORRENTI LITORANEE (8/10)

Stimando :

- $y = \frac{h}{s}$ distanza dalla costa;

- $k = \frac{2\pi}{L}$ = numero d'onda, ottenuto calcolando preventivamente la lunghezza d'onda tramite la relazione di dispersione;

- $C = L/T$, celerità dell'onda;

$$- n = \frac{kh}{\sinh(2kh)} + \frac{1}{2} \quad ;$$

$$- k_{sh} = \sqrt{\frac{1}{\tanh(kh) \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)}} \quad ;$$

- H = altezza d'onda, ricavata - fino al frangimento - tramite il coefficiente di shoaling e l'altezza d'onda su profondità infinita;

- H_{limite} = altezza d'onda nella zona dei frangenti calcolata come prodotto dell'indice di frangimento (γ) per la profondità locale;

- a_o = ampiezza massima di oscillazione delle particelle al fondo, valutata con l'espressione:

$$\text{(teoria lineare)} \quad a_o = \frac{H}{2 \sinh(kh)} \quad ;$$

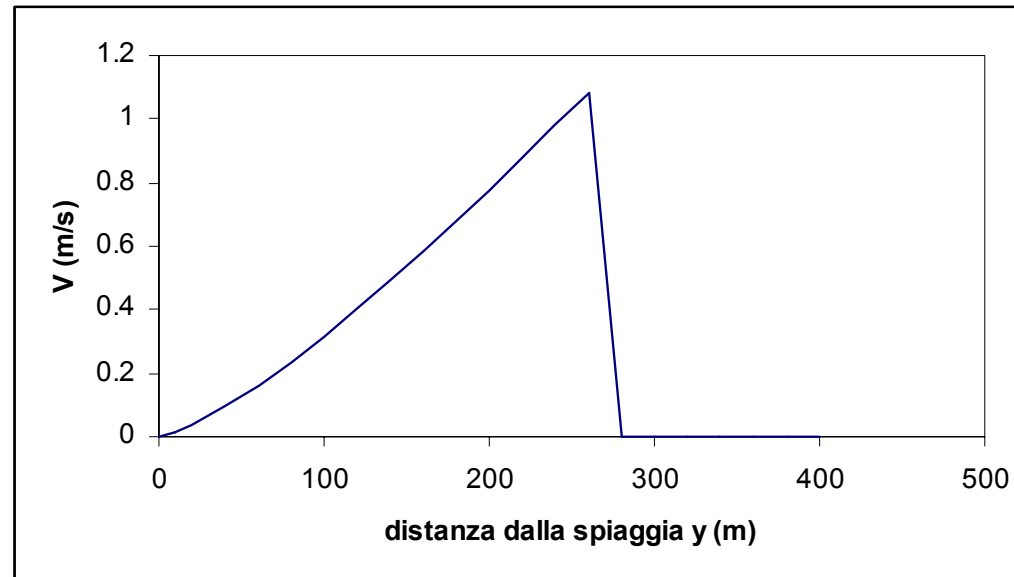
CALCOLO DELLE CORRENTI LITORANEE (9/10)

- f_w = coefficiente di resistenza valutato attraverso l'espressione: $f_w = \exp[-5.977 + 5.213(a_{o/r})^{-0.194}]$;

- \tilde{C} = coefficiente di Chezy, valutato come: $\tilde{C} = 18 \cdot \log\left(\frac{12h}{r}\right)$;

- V = velocità meditata sulla verticale calcolata con la formula semplificata:

$$V = \frac{5\pi}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin(\varphi_o)}{C_o} \cdot \frac{\tilde{C}}{\sqrt{f_w}} \cdot \gamma \cdot \sqrt{g} \cdot h \cdot s$$



CALCOLO DELLE CORRENTI LITORANEE (10/10)

y (m)	h (m)	K (1/m)	c (m/s)	n (-)	ϕ (grad)	ks	H (m)	H _{lim} (m)	a _o (m)	f _w (-)	C (m ^{1/2} /s)	V (m/s)
0	0	-	0	-	0.0	0.00	-	0	-	-	-	-
10	0.1	0.908	0.99	1.00	2.6	2.35	4.38	0.08	0.44	0.09	23.42	0.01
20	0.2	0.643	1.40	0.99	3.7	1.98	3.69	0.16	0.62	0.07	28.84	0.03
40	0.4	0.456	1.97	0.99	5.2	1.67	3.12	0.32	0.87	0.06	34.26	0.09
60	0.6	0.373	2.41	0.98	6.3	1.52	2.84	0.48	1.06	0.05	37.43	0.16
80	0.8	0.324	2.77	0.98	7.3	1.42	2.65	0.64	1.22	0.05	39.67	0.23
100	1	0.291	3.09	0.97	8.1	1.35	2.52	0.8	1.36	0.04	41.42	0.32
120	1.2	0.266	3.37	0.97	8.9	1.29	2.42	0.96	1.48	0.04	42.84	0.40
140	1.4	0.247	3.63	0.96	9.6	1.25	2.34	1.12	1.59	0.04	44.05	0.49
160	1.6	0.232	3.87	0.96	10.2	1.21	2.28	1.28	1.69	0.04	45.09	0.58
180	1.8	0.219	4.10	0.95	10.8	1.18	2.22	1.44	1.78	0.04	46.01	0.68
200	2	0.208	4.31	0.95	11.4	1.16	2.18	1.6	1.87	0.04	46.84	0.78
220	2.2	0.199	4.51	0.94	11.9	1.14	2.14	1.76	1.94	0.04	47.58	0.88
240	2.4	0.191	4.69	0.94	12.4	1.12	2.10	1.92	2.02	0.04	48.26	0.98
260	2.6	0.184	4.87	0.93	12.9	1.10	2.07	2.08	2.08	0.03	48.89	1.08
280	2.8	0.178	5.04	0.93	13.3	1.08	2.04	2.24	1.96	0.04	49.47	0
300	3	0.173	5.20	0.92	13.8	1.07	2.02	2.4	1.86	0.04	50.01	0
320	3.2	0.168	5.36	0.92	14.2	1.06	1.99	2.56	1.77	0.04	50.51	0
340	3.4	0.163	5.50	0.91	14.6	1.04	1.97	2.72	1.69	0.04	50.99	0
360	3.6	0.159	5.65	0.91	15.0	1.03	1.96	2.88	1.62	0.04	51.43	0
380	3.8	0.155	5.79	0.90	15.4	1.02	1.94	3.04	1.55	0.04	51.85	0
400	4	0.152	5.92	0.90	15.7	1.02	1.93	3.2	1.49	0.04	52.26	0